



TITLE:

Special generic map と L^2 -Betti number(可微分写像の特異点論: トポロジーと応用)

AUTHOR(S):

原, 靖浩

CITATION:

原, 靖浩. Special generic map と L^2 -Betti number(可微分写像の特異点論: トポロジーと応用). 数理解析研究所講究録 1996, 952: 170-183

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60371>

RIGHT:

Special generic map と L^2 -Betti number

阪大理 原 靖浩 (Yasuhiko Hara)

序

M^n を n 次元連結閉 C^∞ 多様体, $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq p$) を C^∞ 写像とする。 f の特異点集合 $S(f) = \{x \in M^n \mid \text{rank}(df_x) < p\}$ の点 x が定値 fold 型特異点とは、 x を中心とする M^n の局所座標 (x_1, x_2, \dots, x_n) , $f(x)$ を中心とする \mathbb{R}^p の局所座標 (y_1, \dots, y_p) , 整数 λ ($0 \leq \lambda \leq n-p+1$) が存在して、

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leq i \leq p-1)$$

$$y_p \circ f = x_p^2 + \dots + x_n^2$$

と書けるときを言う。特異点集合が定値 fold 型特異点のみからなる写像を special generic map という。 special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するとき、特異点集合 $S(f)$ は $(p-1)$ 次元多様体になり、 M^n 自身の位相や、 M^n と $S(f)$ の位相の関係については様々な結果が知られている。 ([BdR, Sae1, Sae2, Sak1, Sak2] を参照。) 本稿では、 L^2 -Betti number を用いて、 special generic map を許す多様体の位相や、特異点集合との関係を

調べることにする。

§1. L^2 -Betti number

X を有限連結 CW 複体とし、その基本群を Γ で表す。 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を universal covering とし、 \tilde{X} とその cellular chain complex には、左から Γ を作用させることにする。ベクトル空間 $\ell^2(\Gamma) = \{ \sum_{g \in \Gamma} \lambda_g \cdot g \text{ (形式的和)} \mid \lambda_g \in \mathbb{C}, \sum_{g \in \Gamma} |\lambda_g|^2 < \infty \}$ に内積を $\langle \sum_{g \in \Gamma} \lambda_g \cdot g, \sum_{g \in \Gamma} \mu_g \cdot g \rangle = \sum_{g \in \Gamma} \lambda_g \overline{\mu_g}$ と定めることにより、 $\ell^2(\Gamma)$ は Hilbert 空間になる。

$\ell^2(\Gamma)$ から $\ell^2(\Gamma)$ への有界 Γ -同変作用素の全体からなる集合を Γ の von Neumann algebra と呼び、 $\mathcal{N}(\Gamma)$ で表す。また、Hilbert 空間 P が、等長 Γ -作用をもち、ある $r \in \mathbb{N}$ に対して、 $\bigoplus_{i=1}^r \ell^2(\Gamma)$ の中への等長 Γ -同変埋め込みが存在するとき、 P を有限生成 Hilbert $\mathcal{N}(\Gamma)$ -module と呼ぶことにする。次に、有限生成 Hilbert $\mathcal{N}(\Gamma)$ -module P の von Neumann dimension を定義しよう。 $pr: \bigoplus_{i=1}^r \ell^2(\Gamma) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \ell^2(\Gamma)$ を $\text{im}(pr)$ が P と等長 Γ -同変同型な射影作用素とする。 pr を $\mathcal{N}(\Gamma)$ 上の $r \times r$ 行列 (p_{ij}) とみなし、 P の von Neumann dimension $\dim_{\mathcal{N}(\Gamma)} P$ を

$$\dim_{\mathcal{N}(\Gamma)} P = \sum_{i=1}^r \langle p_{ii}(e), e \rangle \quad (e \text{ は } \Gamma \text{ の単位元})$$

と定義する。

さて、 \tilde{X} の cellular chain complex $C_*(\tilde{X})$ には Γ が左から

作用しており、 $C_*(\tilde{X})$ を左 $\mathbb{Z}\Gamma$ -module の chain complex とみて、 $\ell^2(\Gamma)$ とのテンソル積 $\ell^2(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\tilde{X})$ を $C_*^{(2)}(X)$ と書くことにする。 $C_*^{(2)}(X)$ は、有限生成 Hilbert $N(\Gamma)$ -module の chain complex で、有界 Γ -同変作用素 $d_p^{(2)} (= \text{id} \otimes d_p)$ を boundary 作用素としてもつ。 X の p 次元 L^2 -homology を

$$H_p^{(2)}(X) = \ker d_p^{(2)} / \overline{\text{im } d_{p+1}^{(2)}}, \quad (\overline{\text{im } d_{p+1}^{(2)}} \text{ は } \text{im } d_{p+1}^{(2)} \text{ の closure})$$

と定義する。また X の p 次 L^2 -Betti number $b_p^{(2)}(X)$ を

$$b_p^{(2)}(X) = \dim_{\mathbb{R}}(H_p^{(2)}(X))$$

と定義する。 L^2 -Betti number について、次のことが知られている。([A, (6.4)], [L1, Lemma 1.2], [LL, section 3] を参照)

補題 1.1. (i) X の Euler characteristic $\chi(X)$ に対して、

$$\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p^{(2)}(X).$$

(ii) $p' : X' \rightarrow X$ を n 重 covering とすると、 $b_p^{(2)}(X') = n b_p^{(2)}(X)$.

(iii) $\Gamma (= \pi_1(X))$ が有限群のとき、 $b_0^{(2)}(X) = \frac{1}{|\Gamma|}$, Γ が無限群のとき、 $b_0^{(2)}(X) = 0$. (ここで、 $|\Gamma|$ は、 Γ の位数を表す.)

(iv) X が n 次元閉多様体のとき、 $b_p^{(2)}(X) = b_{n-p}^{(2)}(X)$, ($0 \leq p \leq n$).

例. (i) n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ について、

$$\text{補題 1.1, (ii) より、} b_p^{(2)}(S^n) = 2 b_p^{(2)}(\mathbb{R}P^n).$$

S^n は単連結であり、定義より、 $b_p^{(2)}(S^n)$ は通常の Betti number

$b_p(S^n)$ と等しくなる。よって、

$$b_0^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = b_n^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}.$$

$p \neq 0, n$ のとき、 $b_p^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = 0$ 。

(2) Σ_g を genus g ($g \geq 1$) の有向閉曲面とする。

補題1.1, (iii) と (iv) より、 $b_2^{(2)}(\Sigma_g) = b_0^{(2)}(\Sigma_g) = 0$ 。

補題1.1, (i) より、 $\chi(\Sigma_g) = b_0^{(2)}(\Sigma_g) - b_1^{(2)}(\Sigma_g) + b_2^{(2)}(\Sigma_g)$

したがって、 $b_1^{(2)}(\Sigma_g) = -\chi(\Sigma_g) = 2g - 2$ 。

群 Γ の単位元でない任意の元 g に対して、有限群 G と準同型 $\phi: \Gamma \rightarrow G$ で、 $\phi(g)$ が G の単位元にならないものが存在するとき、 Γ を residually finite という。群 Γ が可算で、residually finite のとき、 Γ の正規部分群の列 $\cdots \subset \Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m \subset \cdots \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0 = \Gamma$ で、 $\forall m \geq 0$ に対して $[\Gamma: \Gamma_m] < \infty$ であり、かつ $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_m = \{e\}$ (e は Γ の単位元) を満たすものが存在する。

基本群が有限位数の有限連結CW複体の L^2 -Betti number については、例(1)の場合のように universal covering の Betti number を用いて計算できる。基本群が residually finite のときに、Lück は次のことを示している。

定理 1.2. ([L2, Theorem 0.1]). X を有限連結CW複体で、そ

の基本群 Γ は residually finite であるものとする。 Γ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ を上の状況をみたすものとし、 X_m により Γ_m に対応する X の covering を表すことにする。このとき、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_p(X_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} = b_p^{(2)}(X).$$

ここで、 $b_p(X_m)$ は X_m の通常の Betti number である。

W をコンパクト連結 p 次元多様体で、その境界 ∂W は空でなく、基本群 Γ は residually finite かつ無限位数をもつものとする。 Γ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ を上と同様の条件を満たし、さらに Γ_1 に対応する W の covering W_1 は向きづけ可能であるようにとる。このとき、次のことが成り立つ。

補題 1.3. 上の状況の下で、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma : \Gamma_m]} \leq b_{p-1}^{(2)}(W),$$

ここで、 $|\pi_0(\partial W_m)|$ は $\pi_0(\partial W_m)$ の元の個数である。

(証明) $m \geq 1$ では W_m は向きづけ可能であり、空間対 $(W_m, \partial W_m)$ に対する homology 完全系列を考えると、 $b_{p-1}(\partial W_m) \leq 1 + b_{p-1}(W_m)$ がわかる。 $b_{p-1}(\partial W_m) = b_0(W_m) = |\pi_0(\partial W_m)|$ だから、 $|\pi_0(\partial W_m)| \leq 1 + b_{p-1}(W_m)$ したがって、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma : \Gamma_m]} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + b_{p-1}(W_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]}.$$

$|\Gamma| = \infty$ であることと、定理1.2より $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma; \Gamma_m]} \leq b_{p-1}^{(2)}(W)$ が示される。 \square

命題1.4. W を空でない境界をもつコンパクト連結 p 次元多様体で、その基本群は residually finite で無限位数をもつものとし、 $b_{p-1}^{(2)}(W) = 0$ を満たすものとする。このとき、 ∂W の各連結成分の基本群は無限位数をもつ。

証明) ∂W のある連結成分 C の基本群の位数が有限とすると、補題1.3の中のような $\Gamma (= \pi_1(W))$ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ とそれに対応する covering $p_m: W_m \rightarrow W$ に対して、

$$|\pi_0(\partial W_m)| \geq |\pi_0(p_m^{-1}(C))| \geq [\Gamma; \Gamma_m] / |\pi_1(C)|$$

が成り立ち、したがって、 $|\pi_0(\partial W_m)| / [\Gamma; \Gamma_m] \geq \frac{1}{|\pi_1(C)|} > 0$ 。

補題1.3より、 $b_{p-1}^{(2)}(W) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma; \Gamma_m]} \geq \frac{1}{|\pi_1(C)|} > 0$ 。

よって、 $b_{p-1}^{(2)}(W) = 0$ のとき、 ∂W の各連結成分の基本群の位数は無限になる。 \square

命題1.5. W を空でない境界をもつコンパクト連結有向3次元多様体で、その基本群は residually finite で無限位数をもち、 $b_1^{(2)}(W) = 0$ となるものとする。このとき、 ∂W の各連結成分は球面またはトーラスに同相で、球面に同相な連結成分の個

数は $b_2^{(2)}(W)$ と等しい。

証明) $X = W \cup_{\partial W} W$ とおく。

また、 ∂W の連結成分への分解を $\partial W = C_1 \cup \cdots \cup C_k \cup C_{k+1} \cup \cdots \cup C_\ell$,
 $C_i \approx S^2 (1 \leq i \leq k)$, $C_i \approx S^1 (k+1 \leq i \leq \ell)$ とする。

X は 3 次元有向閉多様体だから Euler characteristic $\chi(X)$ は 0 になる。したがって、 $2\chi(W) - \chi(\partial W) = 0$ が成り立つ。

補題 1.1, (i) より、 $\chi(W) = b_0^{(2)}(W) - b_1^{(2)}(W) + b_2^{(2)}(W)$ 。

W の基本群の位数が無限だから、補題 1.1, (iii) より $b_0^{(2)}(W) = 0$

また、仮定より $b_1^{(2)}(W) = 0$ だから、 $\chi(W) = b_2^{(2)}(W)$ となる。

一方、 ∂W について、 $\chi(S^2) = 2$ であり、 $k+1 \leq i \leq \ell$ に対して

C_i は向きづけ可能であることから、例 (2) の中で見たように、

$\chi(C_i) = -b_1^{(2)}(C_i)$ となる。よって、 $\chi(\partial W) = 2k - \sum_{i=k+1}^{\ell} b_1^{(2)}(C_i)$ 。

以上から、 $2b_2^{(2)}(W) = 2k - \sum_{i=k+1}^{\ell} b_1^{(2)}(C_i)$

よって、 $b_2^{(2)}(W) \leq k$ 。

また、 $\pi_1(W)$ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ を定理 1.2 の中のものと同様のものとし、 W_m により Γ_m に対応する W の covering を表すことにすると、 $|\pi_0(\partial W_m)| \geq k \times [\pi_1(W) : \Gamma_m]$ であり、

補題 1.3 より、 $b_2^{(2)}(W) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\pi_1(W) : \Gamma_m]} \geq k$ 。

したがって、 $b_2^{(2)}(W) = k$ であり、 $\sum_{i=k+1}^{\ell} b_1^{(2)}(C_i) = 0$ がわかる。

例 (2) から、 $k+1 \leq i \leq \ell$ に対して、 $C_i \approx T^2$ である。 □

§2. Special generic map と Stein factorization

以下では、多様体と写像は C^∞ とする。

M^n を n 次元連結閉多様体とし、 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p (n > p)$ を special generic map とする。 $x, x' \in M^n$ に対して、 $f(x) = f(x')$ で、 x と x' が $f^{-1}(f(x))$ の同じ連結成分に属するとき $x \sim x'$ と定義する。

この同値関係による M^n の商空間を W_f と書くことにし、 $\rho_f: M \rightarrow W_f$ を商写像とする。また、写像 $f': W_f \rightarrow \mathbb{R}^p$ で $f' \circ \rho_f = f$ を満たすものが存在する。 W_f または、次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ & \searrow \rho_f & \nearrow f' \\ & W_f & \end{array}$$

を f の Stein factorization という。 W_f には、境界をもつ p 次元多様体の構造で、 f' が immersion、 ρ_f が C^∞ 写像となるようなものがあり、 $S(f) \stackrel{\text{diffeo}}{\cong} \partial W_f$ となることが知られている。

$D^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$ とし、 $S^{m-1} = \partial D^m$ とおく。 D^m -bundle E が linear とは、 E の構造群が直交群 $O(m)$ に簡約できることである。

命題 2.1 ([Sae 1, Proposition 2.1]). M^n を n 次元閉多様体とする。

special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p (n > p)$ が存在するためには、次のことが必要十分条件である。

(1) 境界をもち平行性をもつ p 次元コンパクト多様体 W と、

W 上の smooth S^{n-p} -bundle E と ∂W 上の linear D^{n-p+1} -bundle B で、 E の ∂W 上への制限 ∂E と B に同伴する S^{n-p} -bundle ∂B は同型となるものが存在する。さらに、

(2) ∂W 上の恒等写像上の bundle map となる微分同相写像 $h: \partial B \rightarrow \partial E$ で、 $M \cong E \cup_W B$ を満たすものが存在する。

注意: special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) が存在するとき、上の命題の W は f の Stein factorization W_f と微分同相なものかとれる。

Special generic map の例. (1) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $pr: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) を標準的な射影とする。 $f = pr|_{S^n}: S^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ は special generic map となり、その Stein factorization W_f は、 $W_f \cong D^p$ となる。

(2) $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) を上の special generic map とする。

$\eta: \mathbb{R}^p \times S^l \rightarrow \mathbb{R}^{p+l}$ を埋め込みとし、次の合成を考える。

$$g: S^n \times S^l \xrightarrow{f \times \text{id}} \mathbb{R}^p \times S^l \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}^{p+l}$$

この g は special generic map となり、 $W_g \cong D^p \times S^l$ 。

(3) $M = \partial((S' \times S^2 - \text{int } D^3) \times D^2)$ とおく。

M は \mathbb{R}^3 への special generic map f で、 $W_f \cong S' \times S^2 - \text{int } D^3$,

$S(f) \cong S^2$ となるものが存在する。

一方、 $M \cong S^1 \times S^3 \# S^2 \times S^2$ であり、 M から \mathbb{R}^3 への special generic map g で、 $W_g \cong S^1 \times D^2 \natural S^2 \times I$ (\natural は境界連結和), $S(g) \cong T^2 \cup S^2$ となるものが存在する。

この例から、1つの多様体から特異点集合の異なる2つの special generic map が存在する場合があることがわかる。

Special generic map とその Stein factorization, 特異点集合について、以下のようなことが知られている。

命題 2.2 ([Sae1, Sak2]). $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) を special generic map とする。 n が偶数で p が奇数のとき、 $\chi(M^n) = \chi(S(f))$ 。

命題 2.3 ([Sae1]). $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) を special generic map とし、 $g_f: M^n \rightarrow W_f$ を f の Stein factorization の商写像とする。このとき、 $(g_f)_*: \pi_1(M^n) \rightarrow \pi_1(W_f)$ は同型。

命題 2.4 ([Sae1]). M^n は有向閉多様体とし、 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) を special generic map とする。 $g_f: M^n \rightarrow W_f$ を f の Stein factorization の商写像とすると、 $q \leq n - p$ に対して、 $(g_f)_*: H_q(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(W_f; \mathbb{Z})$ は同型である。

命題 2.5 ([Sae1]). $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p (n > p)$ を special generic map で、 M^n は向きづけ可能とする。 $\#S(f)$ により $S(f)$ の連結成分の個数を表すことにすると、 $\#S(f) \leq b_{p-1}(M^n) + 1$ 。
さらに、 $n = 2(p-1)$ のとき、 $\#S(f) \leq \frac{1}{2}b_{p-1}(M^n) + 1$ 。

§3. L^2 -Betti number の special generic map への応用。

M^n を n 次元連結閉多様体で、その基本群 Γ が residually finite であるものとする。 Γ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ を、定理 1.2 の中の状況をもたし、 Γ_1 に対応する covering は向きづけ可能であるものとする。 special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するとき、 $p_m: M_m \rightarrow M$ を Γ_m に対応する M の covering とし、 $f_m = f \circ p_m$ とおくと、 $f_m: M_m \rightarrow \mathbb{R}^p$ もまた special generic map になる。次のことは容易にわかる。

補題 3.1. $f_m: M_m \rightarrow \mathbb{R}^p$ の Stein factorization W_{f_m} は、 $(\mathcal{G}_f)_*(\Gamma_m) (\cong \Gamma_m)$ に対応する W_f の covering space である。

この補題と命題 2.3, 2.4, 定理 1.2 より、次のことが示される。

命題 3.2. $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p (n > p)$ は special generic map で、 $\pi_1(M)$ は residually finite とする。このとき、 $q \leq n-p$ に対して、

$$b_q^{(1)}(M) = b_q^{(2)}(W_f).$$

証明) $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$, M_m , f_m を補題 3.1 の中のものとする。

命題 2.4 より, $m \geq 1$, $q \leq n-p$ に対して $b_q(M_m) = b_q(W_{f_m})$.

命題 2.3 より, $[\Gamma : \Gamma_m] = [(\beta_f)_*(\Gamma) : (\beta_f)_*(\Gamma_m)]$ であり, 定理 1.2 を用いると, $b_q^{(2)}(M) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_q(M_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_q(W_{f_m})}{[(\beta_f)_*(\Gamma) : (\beta_f)_*(\Gamma_m)]} = b_q^{(2)}(W_f) \quad \square$

系 3.3. M^n を n 次元連結閉多様体で $\pi_1(M)$ が residually finite なものとする。ある $q \leq \frac{n}{2}$ に対して $b_q^{(2)}(M) \neq 0$ であるとき, $p \leq q$ をみたす p について, M^n は \mathbb{R}^p の special generic map をもたない。

命題 3.4. M^n を n 次元連結閉多様体で $\pi_1(M)$ は residually finite かつ無限位数をもつものとする。special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n > p$) が存在するとき, $(\Gamma_m)_{m \geq 0}$ を補題 3.1 と同じ状況を満たす正規部分群の列とし, M_m , f_m を補題 3.1 と同様のものとする。

このとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\#S(f_m)}{[\pi_1(M) : \Gamma_m]} \leq b_{p-1}^{(2)}(M)$.

さらに, $n = 2(p-1)$ のとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\#S(f_m)}{[\pi_1(M) : \Gamma_m]} \leq \frac{1}{2} b_{p-1}^{(2)}(M)$.

この命題の証明は, 命題 2.5 と定理 1.2 を用いて, 補題 1.3 の証明と同様のことをする。補題 1.3 から命題 1.4 を導いたの

と同様にして、命題3.4から次のことが導かれる。

定理3.5. M^n を n 次元連結閉多様体で、 $\pi_1(M)$ はresidually finiteかつ位数が無限のもつとする。ある $p(p < n)$ に対して $b_{p-1}^{(2)}(M^n) = 0$ で、special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するとき、 f の特異点集合 $S(f)$ の各連結成分の基本群の位数は無限である。

\mathbb{R}^3 への special generic map については、次のことがわかる。

定理3.6. $M^n (n \geq 3)$ を n 次元連結閉多様体で、 $\pi_1(M)$ は位数が無限なresidually finite群となり、 $b_1^{(2)}(M) = 0$ をみたすものとする。special generic map $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するとき、特異点集合 $S(f)$ の各連結成分は球面かトーラスに同相で、さらに、球面に同相な連結成分の個数は、 $n \geq 5$ のときは $b_2^{(2)}(M)$ と等しく、 $n = 4$ のときは $\frac{1}{2}b_2^{(2)}(M)$ と等しい。

証明の概略) 命題3.2より、 $b_1^{(2)}(W_f) = b_1^{(2)}(M) = 0$ であり、 $\partial W_f \cong S(f)$ だから、命題1.5より、 $S(f)$ の各連結成分は球面またはトーラスに同相で、球面と同相な連結成分の個数は $b_2^{(2)}(W_f)$ と等しい。 $n \geq 5$ のとき、命題3.2より $b_2^{(2)}(M) = b_2^{(2)}(W_f)$ 、 $n = 4$ のとき、命題2.2より $\chi(M) = \chi(S(f))$ で、 $b_0^{(2)}(M) = b_1^{(2)}(M) = 0$ とあわせて証明できる。□

参考文献

- [A] M. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Soc. Math. France, Astérisque 32-33(1976), 43-72.
- [BdR] O. Burlet and G. de Rham, Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3-dimensions dans le plane, L'Enseign. Math. 20(1974), 275-292.
- [LL] J. Lott and W. Lück, L^2 -topological invariants of 3-manifolds, Invent. Math. 120(1995), 15-60.
- [L1] W. Lück, L^2 -Betti numbers of mapping tori and groups, Topology 33(1994), 203-214.
- [L2] W. Lück, Approximating L^2 -invariants by their finite-dimensional analogues, Geom. Funct. Anal. 4(1994), 455-481.
- [Sae1] O. Saeki, Topology of special generic maps from a closed manifold into the plane, Topology Appl. 49(1993), 265-293.
- [Sae2] O. Saeki, Topology of special generic maps into \mathbb{R}^3 , Matematica Contemporânea 5(1993), 161-186.
- [Sak1] K. Sakuma, On special generic maps of simply connected $2n$ -manifolds into \mathbb{R}^3 , Topology Appl. 50(1993), 249-261.
- [Sak2] K. Sakuma, On the topology of simple fold maps, Tokyo J. Math. 17(1994), 21-31.